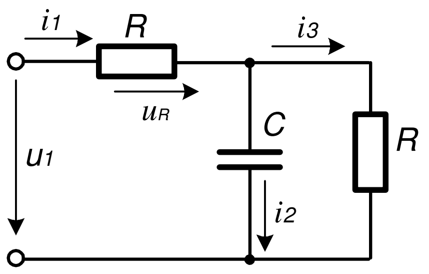
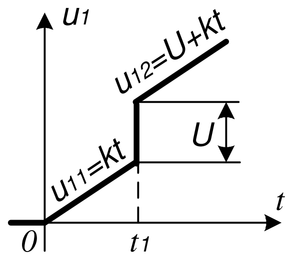
Дана электрическая схема, на входе которой действует напряжение, изменяющееся во времени по заданному закону $U_1(t)$. Требуется определить закон изменения во времени тока в одной из ветвей схемы или напряжения на заданном участке схемы. Рис., на котором приведен график изменения во времени входного напряжения. Параметры цепи R, L, C заданы в буквенном виде.

Задачу требуется решить, используя интеграл Дюамеля. Искомую величину следует определить (записать ее аналитическое выражение) для всех интервалов времени. В зависимости от условий задачи полный ответ будет содержать два или три соотношения, каждое из которых справедливо лишь в определенном диапазоне времени.

В каждом ответе следует выполнить приведение подобных членов относительно $e^{-b_1 t}$, $e^{-b_1(t-t_1)}$, t и выделить постоянную составляющую.

Примечание. *На рис. входное напряжение дано с двумя индексами. Первый индекс указывает на входное напряжение, второй – на интервал времени о котором идет речь.*





Дано:

R

C

U

k

t_1

$u_{11} = kt$

$u_{12} = U + kt$

Определить: $u_R - ?$

Решение:

1) Определим переходную $h(t)$ функцию по напряжению $h(t) = \dfrac{u_R}{u_1}$, при $u_1 = 1\ B$, классическим методом.

$$u_R = u_{R\ пр} + u_{R\ св}$$

, где

$$u_{R\ пр} = i_{1пр} R = \frac{u_1}{(R+R)} \cdot R = \frac{1}{2}\ \ B$$

$$u_{R\ св} = Ae^{p \cdot t}$$

Определим p методом входного сопротивления:

$$Z_{вх}(p) = R + \frac{R\frac{1}{pC}}{R+\frac{1}{pC}} = R + \frac{\frac{R}{pC}}{\frac{RCp+1}{pC}} = R + \frac{R}{RCp+1} = \frac{R^2Cp+R+R}{RCp+1} = 0$$

$$\Rightarrow R^2Cp + 2R = 0$$

$$\Rightarrow p = -\frac{2}{RC}$$

По законам коммутации $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$

По 2-у закону Кирхгофа:

$$u_R(0_+) + u_C(0_+) = u_1(0_+)$$

$$\Rightarrow u_R(0_+) = u_1(0_+) - u_C(0_+) = 1 - 0 = 1 \ \ B$$

, тогда подставляя полученные значения при $t = 0_+$ в уравнение для u_R определим коэффициент A

$$u_R = u_{R\,пр} + u_{R\,св} = \frac{1}{2} + Ae^{p\cdot t}$$

$$u_R(0_+) = \frac{1}{2} + A$$

$$1 = \frac{1}{2} + A \qquad \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Получаем

$$h(t) = \frac{u_R}{u_1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{pt}}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{RC}t}$$

$$h(t-\tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{RC}(t-\tau)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{RC}t}e^{\frac{2}{RC}\tau}$$

$$u_1(0) = 0$$

2) Искомую величину определим (записав ее аналитическое выражение) для всех интервалов времени. В зависимости от условий задачи ответ будет содержать одно или несколько выражений, каждое из которых справедливо лишь в определенном диапазоне времени.

Определим реакцию цепи применяя интеграл Дюамеля на интервале
Времени $0 \le t < t_1$:

$$u_R(t) = 0 \cdot h(t) + \int_0^t u'_{11}(\tau) \cdot h(t-\tau)d\tau = \int_0^t (k\tau)' \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{RC}t} e^{\frac{2}{RC}\tau} \right) d\tau =$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^t d\tau + \frac{k}{2} e^{-\frac{2}{RC}\cdot t} \int_0^t e^{\frac{2}{RC}\cdot\tau} d\tau = \frac{k}{2}\tau\Big|_0^t + \frac{k}{2} e^{-\frac{2}{RC}\cdot t} \left. \frac{e^{\frac{2}{RC}\cdot\tau}}{\frac{2}{RC}} \right|_0^t =$$

$$= \frac{k}{2}\cdot t + \frac{RCk}{4} e^{-\frac{2}{RC}\cdot t} \left(e^{\frac{2}{RC}\cdot t} - 1 \right) = \frac{RCk}{4} - \frac{RCk}{4} \cdot e^{-\frac{2}{RC}\cdot t} + \frac{k \cdot t}{2}, B$$

Определим реакцию цепи применяя интеграл Дюамеля на интервале
Времени $t \ge t_1$:

$$i_3(t) = 0 \cdot h(t) + \int_0^{t_1} u'_{11}(\tau) \cdot h(t-\tau)d\tau + U \cdot h(t-t_1) + \int_{t_1}^t u'_{12}(\tau) \cdot h(t-\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^{t_1} (k\tau)' \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{RC}t} e^{\frac{2}{RC}\tau} \right) d\tau + U \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{RC}t} e^{\frac{2}{RC}t_1} \right) +$$

$$+ \int_{t_1}^t (U + k\tau)' \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{RC}t} e^{\frac{2}{RC}t_1} \right) d\tau =$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^{t_1} d\tau + \frac{k}{2} e^{-\frac{2}{RC}\cdot t} \int_0^{t_1} e^{\frac{2}{RC}\cdot\tau} d\tau + \frac{U}{2} + \frac{U}{2} e^{-\frac{2}{RC}\cdot t} e^{\frac{2}{RC}\cdot t_1} + \frac{k}{2}\int_{t_1}^t d\tau + \frac{k}{2} e^{-\frac{2}{RC}\cdot t} \int_{t_1}^t e^{\frac{2}{RC}\cdot\tau} d\tau =$$

$$= \frac{k}{2}\tau\Big|_0^{t_1} + \frac{k}{2} e^{-\frac{2}{RC}\cdot t} \left. \frac{e^{\frac{2}{RC}\cdot\tau}}{\frac{2}{RC}} \right|_0^{t_1} + \frac{k}{2}\tau\Big|_{t_1}^t + \frac{k}{2} e^{-\frac{2}{RC}\cdot t} \left. \frac{e^{\frac{2}{RC}\cdot\tau}}{\frac{2}{RC}} \right|_{t_1}^t + \frac{U}{2} + \frac{U}{2} e^{-\frac{2}{RC}\cdot t} e^{\frac{2}{RC}\cdot t_1} =$$

$$= \frac{k}{2}\cdot t_1 + \frac{RCk}{4} e^{-\frac{2}{RC}\cdot t} \left(e^{\frac{2}{RC}\cdot t_1} - 1 \right) + \frac{k}{2}\cdot(t - t_1) + \frac{RCk}{4} e^{-\frac{2}{RC}\cdot t} \left(e^{\frac{2}{RC}\cdot t} - e^{\frac{2}{RC}\cdot t_1} \right) + \frac{U}{2} + \frac{U}{2} e^{-\frac{2}{RC}\cdot t} e^{\frac{2}{RC}\cdot t_1} =$$

$$= \frac{k}{2}\cdot t + \frac{RCk}{4} e^{-\frac{2}{RC}\cdot t} \left(e^{\frac{2}{RC}\cdot t} - 1 \right) + \frac{U}{2} e^{-\frac{2}{RC}\cdot t} e^{\frac{2}{RC}\cdot t_1} + \frac{U}{2} =$$

$$= \frac{k}{2}\cdot t + \left(\frac{U}{2} e^{\frac{2}{RC}\cdot t_1} - \frac{RCk}{4} \right) e^{-\frac{2}{RC}\cdot t} + \frac{U}{2} + \frac{RCk}{4} \quad ,B$$