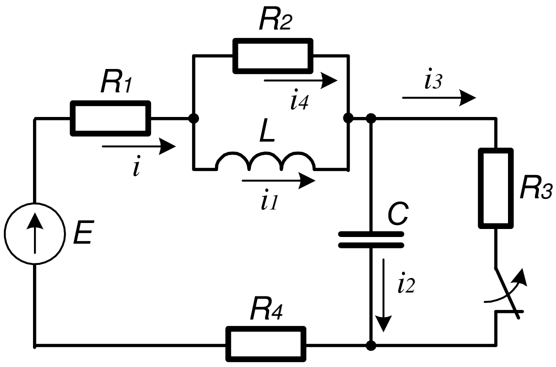
Дано:

$E = 150$ $В$
$L = 4$ $мГн$
$C = 5$ $мкФ$
$R_1 = 3$ $Ом$
$R_2 = 10$ $Ом$
$R_3 = 5$ $Ом$
$R_4 = 7$ $Ом$
$u_{R1}(t) - ?$



I) Расчет классическим методом

Примем

$$R = R_1 + R_4 = 3 + 7 = 10 \;\; Ом$$

1) Расчет режима до коммутации (при $t = 0_-$)

$$i_2(0_-) = i_4(0_-) = 0$$

$$i(0_-) = i_1(0_-) = i_3(0_-) = \frac{E}{R + R_3} = \frac{150}{10+5} = 10 \;\; A$$

$$u_C(0_-) = i_3(0_-)R_3 = 10 \cdot 5 = 50 \;\; B$$

$$u_{R1}(0_-) = i(0_-)R_1 = 10 \cdot 3 = 30 \;\; B$$

по независимым начальным условиям:

$$i_1(0_+) = i_1(0_-) = 10 \;\; A$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 50 \;\; B$$

2) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни

$$Z(p) = R + \frac{1}{Cp} + \frac{R_2 Lp}{R_2 + Lp} = \frac{R_2 LCp^2 + R_2 + Lp + Cp\left(R_2 + Lp\right)R}{Cp\left(R_2 + Lp\right)} = 0$$

$$\Rightarrow R_2 LCp^2 + R_2 + Lp + Cp\left(R_2 + Lp\right)R = 0$$

$$\left(R + R_2\right)LCp^2 + \left(RR_2C + L\right)p + R_2 = 0$$

$$(10+10) \cdot 0{,}004 \cdot 5\times10^{-6} p^2 + \left(10 \cdot 10 \cdot 5\times10^{-6} + 0{,}004\right)p + 10 = 0$$

$$4\times10^{-7} p^2 + 0{,}0045 p + 10 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-0{,}0045 \pm \sqrt{0{,}0045^2 - 4 \cdot 4\times10^{-7} \cdot 10}}{2 \cdot 4\times10^{-7}}$$

$$p_1 \approx -3048{,}1 \;\; c^{-1};$$

$$p_2 \approx -8201{,}9 \;\; c^{-1}$$

Корни действительные и разные значит переходный процесс будет апериодическим.

3) Запишем свободную составляющую тока i

$$i_{1св}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

, где A_1 и A_2 - постоянные интегрирования;

$|p_2| > |p_1|$, поэтому экспонента с показателем $p_2 t$ будет затухать быстрее чем с показателем $p_1 t$.

4) Расчет установившегося режима после коммутации.

$$i_{пр} = i_{1пр} = i_{2пр} = i_{3пр} = i_{4пр} = 0$$
$$u_{C\ пр} = E = 150 \ \ B$$

5) По независимым начальным условиям рассчитаем токи и напряжения в схеме при $t = 0_+$

По 1-у закону Кирхгофа:

$$i(0_+) = i_1(0_+) + i_4(0_+)$$

По 2-у закону Кирхгофа:

$$i(0_+)R + i_4(0_+)R_2 + u_C(0_+) = E$$
$$\left(i_1(0_+) + i_4(0_+)\right)R + i_4(0_+)R_2 + u_C(0_+) = E$$
$$i_4(0_+)\left(R + R_2\right) = E - i_1(0_+)R - u_C(0_+)$$
$$i_4(0_+) = \frac{E - i_1(0_+)R - u_C(0_+)}{R + R_2} = \frac{150 - 10\cdot 10 - 50}{10 + 10} = 0$$

тогда

$$i_2(0_+) = i(0_+) = i_1(0_+) + i_4(0_+) = 10 + 0 = 10 \ \ A$$

6) Свободные составляющие токов и напряжений при $t = 0_+$ найдем как разницу между переходными и принужденными величинами.

$$i_{1св}(0_+) = i_1(0_+) - i_{1пр} = 10 - 0 = 10 \ \ A$$
$$i_{2св}(0_+) = i_2(0_+) - i_{2пр} = 10 - 0 = 10 \ \ A$$
$$i_{4св}(0_+) = i_4(0_+) - i_{4пр} = 0 - 0 = 0 \ \ A$$
$$u_{C\ св}(0_+) = u_C(0_+) - u_{C\ пр} = 50 - 150 = -100 \ \ A$$
$$L\frac{di_{1\ св}(0_+)}{dt} - i_{4св}(0_+)R_2 = 0 \ \ \Rightarrow \frac{di_{1\ св}(0_+)}{dt} = \frac{i_{4св}(0_+)R_2}{L} = \frac{0\cdot 10}{0,004} = 0$$

7) Определим постоянные интегрирования по начальным условиям

$$\begin{cases} i_{1св}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \\ \dfrac{di_{1св}(t)}{dt} = A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t} \end{cases}$$

Подставим в эти уравнения $t = 0_+$

$$\begin{cases} i_{1св}(0_+) = A_1 + A_2 \\ \dfrac{di_{1св}(0_+)}{dt} = A_1 p_1 + A_2 p_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 = A_1 + A_2 \\ 0 = A_1 p_1 + A_2 p_2 \end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем $A_1 = 10 - A_2$

Подставив это выражение во второе уравнение системы, найдем A_2

$$0 = A_1 p_1 + A_2 p_2$$
$$0 = \left(10 - A_2\right) p_1 + A_2 p_2$$
$$-10 p_1 = A_2 \left(p_2 - p_1\right)$$
$$\Rightarrow A_2 = \frac{-10 p_1}{p_2 - p_1} = \frac{-10 \cdot \left(-3048,1\right)}{-8201,9 - (-3048,1)} \approx -5,914 \quad A$$

тогда $A_1 = 10 - A_2 = 10 - (-5,914) = 15,914 \quad A$

8) Ток i_1(t) найдем как сумму его принужденной и свободной составляющих:

$$i_1(t) = i_{1пр} + i_{1св}(t) = i_{1пр} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = 15,914 \cdot e^{-3048,1 \cdot t} - 5,914 \cdot e^{-8201,9 \cdot t}, A$$

тогда напряжение на индуктивности:

$$u_{L1}(t) = L\frac{di_1(t)}{dt} = 0,004 \cdot \left(15,914 \cdot e^{-3048,1 \cdot t} - 5,914 \cdot e^{-8201,9 \cdot t}\right) \approx$$
$$\approx -194 \cdot e^{-3048,1 \cdot t} + 194 \cdot e^{-8201,9 \cdot t}, B$$

По закону Ома:

$$i_4(t) = \frac{u_{L1}(t)}{R_2} = \frac{-194 \cdot e^{-3048,1 \cdot t} + 194 \cdot e^{-8201,9 \cdot t}}{10} = -19,4 \cdot e^{-3048,1 \cdot t} + 19,4 \cdot e^{-8201,9 \cdot t}, A$$

По 1-у закону Кирхгофа:

$$i(t) = i_1(t) + i_4(t) = 15,914 \cdot e^{-3048,1 \cdot t} - 5,914 \cdot e^{-8201,9 \cdot t} - 19,4 \cdot e^{-3048,1 \cdot t} + 19,4 \cdot e^{-8201,9 \cdot t} =$$
$$= -3,486 \cdot e^{-3048,1 \cdot t} + 13,486 \cdot e^{-8201,9 \cdot t}, A$$

для проверки подставим в это уравнение $t = 0_+$ **,**

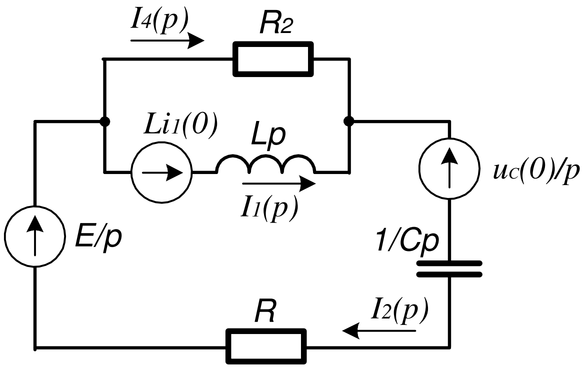
получим $i(0_+) = 10 \quad A$, что совпадает с расчетом по п.5.

Искомое напряжение определим по закону Ома:

$$u_{R1}(t) = R_1 i(t) = 3 \cdot \left(-3,486 \cdot e^{-3048,1 \cdot t} + 13,486 \cdot e^{-8201,9 \cdot t}\right) \approx -10,46 \cdot e^{-3048,1 \cdot t} + 40,46 \cdot e^{-8201,9 \cdot t}, B$$

II) Расчет операторным методом.

1) Составим эквивалентную схему для изображений для момента времени $t = 0_+$



Начальные условия

$$i_1(0) = i_1(0_-) = i_1(0_+) = 10 \ \ A$$
$$u_C(0) = u_C(0_-) = u_C(0_+) = 50 \ \ B$$

2) Найдем изображение тока $I_2(p)$ с помощью уравнений составленных по первому и второму законам Кирхгофа

$$\begin{cases} I_2(p) - I_1(p) - I_4(p) = 0 \\ I_2(p)\left(R + \dfrac{1}{Cp}\right) + I_1(p)Lp = \dfrac{E}{p} - \dfrac{u_C(0)}{p} + Li_1(0) \\ I_2(p)\left(R + \dfrac{1}{Cp}\right) + I_4(p)R_2 = \dfrac{E}{p} - \dfrac{u_C(0)}{p} \end{cases}$$

Выразим из 2-го уравнения системы $I_1(p)$ через $I_2(p)$

$$I_2(p)\frac{RCp+1}{Cp} + I_1(p)Lp = \frac{E - u_C(0) + Li_1(0)p}{p}$$

$$\Rightarrow I_1(p) = \frac{E - u_C(0) + Li_1(0)p}{Lp^2} - \frac{RCp+1}{LCp^2} I_2(p)$$

Выразим из 3-го уравнения системы $I_4(p)$ через $I_2(p)$

$$\frac{RCp+1}{Cp} I_2(p) + I_4(p)R_2 = \frac{E - u_C(0)}{p}$$

$$\Rightarrow I_4(p) = \frac{E - u_C(0)}{R_2 p} - \frac{RCp+1}{R_2 Cp} I_2(p)$$

Подставим найденные выражения в первое уравнение системы и найдем $I_2(p)$

$$I_2(p) - I_1(p) - I_4(p) = 0$$

$$I_2(p) - \frac{E - u_C(0) + Li_1(0)p}{Lp^2} + \frac{RCp+1}{LCp^2} I_2(p) - \frac{E - u_C(0)}{R_2 p} + \frac{RCp+1}{R_2 Cp} I_2(p) = 0$$

$$\left(1 + \frac{RCp+1}{LCp^2} + \frac{RCp+1}{R_2 Cp}\right) I_2(p) = \frac{E - u_C(0) + Li_1(0)p}{Lp^2} + \frac{E - u_C(0)}{R_2 p}$$

$$\frac{R_2 LCp^2 + (RCp+1)R_2 + (RCp+1)Lp}{R_2 LCp^2} I_2(p) = \frac{(E - u_C(0))R_2 + R_2 Li_1(0)p + (E - u_C(0))Lp}{R_2 Lp^2}$$

$$\Rightarrow I_2(p) = \frac{(E - u_C(0))R_2 + R_2 Li_1(0)p + (E - u_C(0))Lp}{R_2 LCp^2 + (RCp+1)R_2 + (RCp+1)Lp} \times C =$$

$$= \frac{(R_2 i_1(0) + E - u_C(0))LCp + (E - u_C(0))R_2 C}{(R + R_2)LCp^2 + (RR_2 C + L)p + R_2}$$

тогда изображение напряжения $U_{R1}(p)$ равно:

$$U_{R1}(p) = I_2(p)R_1 = \frac{\left(R_2 i_1(0) + E - u_C(0)\right)LCp + \left(E - u_C(0)\right)R_2 C}{\left(R + R_2\right)LCp^2 + \left(RR_2C + L\right)p + R_2} R_1 =$$

$$= \frac{\left(R_2 i_1(0) + E - u_C(0)\right)R_1 LCp + \left(E - u_C(0)\right)R_1 R_2 C}{\left(R + R_2\right)LCp^2 + \left(RR_2C + L\right)p + R_2}$$

Подставим числовые значения:

$$U_{R1}(p) = \frac{(10\cdot 10 + 150 - 50)\cdot 3\cdot 0,004\cdot 5\times 10^{-6} p + (150-50)\cdot 3\cdot 10\cdot 5\times 10^{-6}}{(10+10)\cdot 0,004\cdot 5\times 10^{-6} p^2 + \left(10\cdot 10\cdot 5\times 10^{-6} + 0,004\right)p + 10} =$$

$$= \frac{1,2\times 10^{-5} p + 0,015}{4\times 10^{-7} p^2 + 0,0045 p + 10} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$$

Найдем корни уравнения $F_2(p) = 0$

$$4\times 10^{-7} p^2 + 0,0045 p + 10 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-0,0045 \pm \sqrt{0,0045^2 - 4\cdot 4\times 10^{-7}\cdot 10}}{2\cdot 4\times 10^{-7}}$$

$$p_1 \approx -3048,1\ c^{-1};$$

$$p_2 \approx -8201,9\ c^{-1}$$

Корни действительные и разные, значит переходный процесс будет апериодическим.

3) **Для перехода от изображения к оригиналу воспользуемся формулой разложения для простых корней.**

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \doteqdot \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(p_k)\cdot e^{p_k t}}{F_2^{/}(p_k)}$$

в соответствии с этой формулой напряжение $u_{R1}(t)$ будет равно:

$$u_{R1}(t) = \frac{1,2\times 10^{-5} p_1 + 0,015}{2\cdot 4\times 10^{-7} p_1 + 0,0045} e^{p_1\cdot t} + \frac{1,2\times 10^{-5} p_2 + 0,015}{2\cdot 4\times 10^{-7} p_2 + 0,0045} e^{p_2\cdot t} =$$

$$= \frac{1,2\times 10^{-5}\cdot(-3048,1) + 0,015}{8\times 10^{-7}\cdot(-3048,1) + 0,0045} e^{-3048,1\cdot t} + \frac{1,2\times 10^{-5}\cdot(-8201,9) + 0,015}{8\times 10^{-7}\cdot(-8201,9) + 0,0045} e^{-8201,9\cdot t} \approx$$

$$\approx -10,47\cdot e^{-3048,1\cdot t} + 40,47\cdot e^{-8201,9\cdot t}, B$$

Видно, что полученное выражение для напряжения $u_{R1}(t)$

хорошо совпадает с выражением полученным классическим методом.

III) Построим график изменения u_{R1} в функции времени на интервале от $t = 0$ ***до*** $t = t_{nn}$, где

$$t_{nn} = 3 \cdot \tau_{\min} = 3 \cdot 0,00033 = 0,00099 \ \ c$$

$$\tau_{\min} = \frac{1}{|p|_{\min}} = \frac{1}{3048,1} \approx 0,00033 \ \ c$$

$|p|_{\min}$ - меньший по модулю корень характеристического уравнения