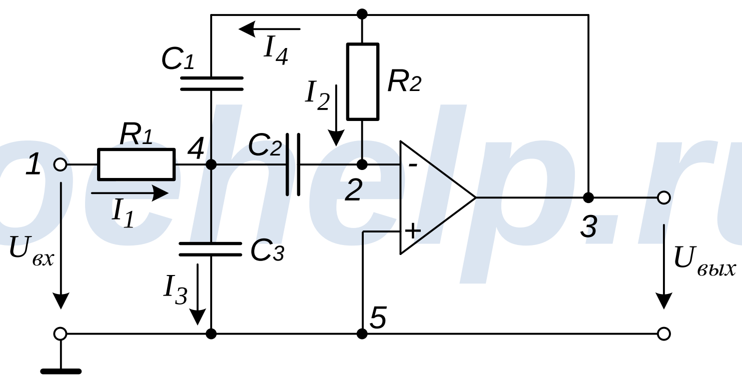
Для RC-цепи с операционным усилителем получить выражение передаточной функции $H(p)=U_{вых}(p)/U_{вх}(p)=(p^n+b_{n-1}p^{n-1}+\ldots+b_0)/(p^m+a_{m-1}p^{m-1}+\ldots+a_0)$
И построить её амплитудно-частотную характеристику для ω=0; 0,5ω_0; ω_0; 2ω_0; 3ω_0; где $\omega_0=\sqrt{a_0}$. При анализе полагать, что операционный усилитель идеальный, т.е. коэффициент усиления и входное сопротивление его → ∞, а входное напряжение и выходное сопротивление → 0.

Числовые значения параметров указаны в таблице

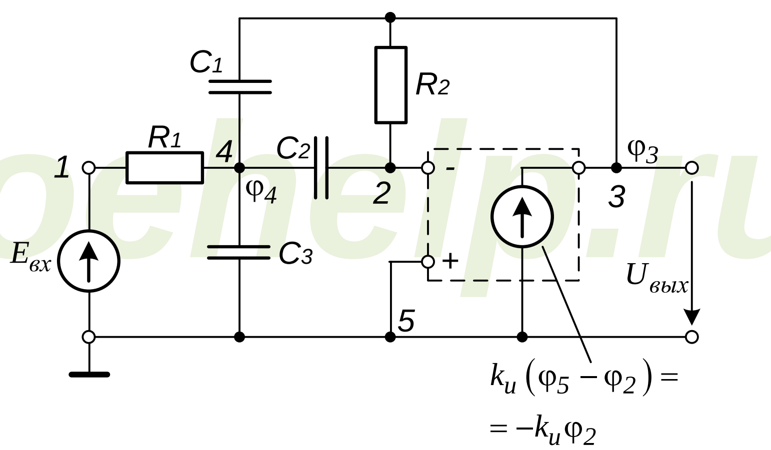
таблица

R_1, кОм	R_2, кОм	R_3, кОм	R_4, кОм	R_5, кОм	C_1, мкФ	C_2, мкФ	C_3, мкФ
0.1	1	-	-	-	1	1	10,8



Решение:

Исходную схему преобразуем в эквивалентную операторную схему замещения. В этой схеме ОУ представлен источником ЭДС, управляемым разностью входных напряжений. Токи входных электродов отсутствуют в предположении, что входное сопротивление бесконечно велико.



На эквивалентной схеме потенциалы узлов $\varphi(t)$, ЭДС источника $e_{вх}(t)$, выходное напряжение $u_{вых}(t)$ и проводимости ветвей представлены соответствующими им изображениями по Лапласу $\varphi(p)$, $E_{вх}(p)$, $U_{вых}(p)$ и $Y(p)$, где $p=s+j\omega$ - комплексная переменная. Далее, где возможно, будем изображения функций записывать компактно φ, $E_{вх}$, $U_{вых}$ и Y, опуская их зависимость от переменной р.

В цепи три независимых узла; потенциал нижнего узла полагаем равным нулю $(\varphi_5 = 0)$. Система должна состоять из 3-х уравнений – два уравнения для потенциалов узлов пассивной части цепи, третье уравнение – математическая модель идеализированного ОУ.

$$\begin{cases} Y_{11}\varphi_4 - Y_{12}\varphi_2 - Y_{13}\varphi_3 = I_{11} \\ -Y_{21}\varphi_4 + Y_{22}\varphi_2 - Y_{23}\varphi_3 = I_{22} \\ -k_u\varphi_2 = \varphi_3 \end{cases}$$

Исключив второй узловой ток, запишем систему уравнений в более удобной форме:

$$\begin{cases} \varphi_4 = \dfrac{1}{Y_{11}} I_{11} + \dfrac{Y_{12}}{Y_{11}}\varphi_2 + \dfrac{Y_{13}}{Y_{11}}\varphi_3 \\ \varphi_2 = \dfrac{Y_{21}}{Y_{22}}\varphi_4 + \dfrac{Y_{23}}{Y_{22}}\varphi_3 \\ \varphi_3 = -k_u\varphi_2 \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений последовательно исключая переменные:

$$\varphi_2 = \frac{Y_{21}}{Y_{22}}\left[\frac{1}{Y_{11}} I_{11} + \frac{Y_{12}}{Y_{11}}\varphi_2 + \frac{Y_{13}}{Y_{11}}\varphi_3\right] + \frac{Y_{23}}{Y_{22}}\varphi_3$$

$$\varphi_2 - \frac{Y_{21}}{Y_{22}}\frac{Y_{12}}{Y_{11}}\varphi_2 = \frac{Y_{21}}{Y_{22}}\frac{1}{Y_{11}} I_{11} + \left[\frac{Y_{21}}{Y_{22}}\frac{Y_{13}}{Y_{11}} + \frac{Y_{23}}{Y_{22}}\right]\varphi_3$$

$$\varphi_2\left(1 - \frac{Y_{21}Y_{12}}{Y_{22}Y_{11}}\right) = \frac{Y_{21}}{Y_{22}Y_{11}} I_{11} + \left(\frac{Y_{21}Y_{13} + Y_{23}Y_{11}}{Y_{22}Y_{11}}\right)\varphi_3$$

$$\varphi_2\left(\frac{Y_{22}Y_{11} - Y_{21}Y_{12}}{Y_{22}Y_{11}}\right) = \frac{Y_{21}}{Y_{22}Y_{11}} I_{11} + \left(\frac{Y_{21}Y_{13} + Y_{23}Y_{11}}{Y_{22}Y_{11}}\right)\varphi_3$$

$$\varphi_2 = \frac{Y_{21}}{Y_{22}Y_{11} - Y_{21}Y_{12}} I_{11} + \left(\frac{Y_{21}Y_{13} + Y_{23}Y_{11}}{Y_{22}Y_{11} - Y_{21}Y_{12}}\right)\varphi_3$$

Примем $Y_{22}Y_{11} - Y_{21}Y_{12} = \Delta$

тогда $\varphi_2 = \dfrac{Y_{21}}{\Delta} I_{11} + \left(\dfrac{Y_{21}Y_{13} + Y_{23}Y_{11}}{\Delta}\right)\varphi_3$

$$\varphi_3 = -k_u\varphi_2 = -k_u\left[\frac{Y_{21}}{\Delta} I_{11} + \left(\frac{Y_{21}Y_{13} + Y_{23}Y_{11}}{\Delta}\right)\varphi_3\right]$$

$$\varphi_3 + k_u\left(\frac{Y_{21}Y_{13} + Y_{23}Y_{11}}{\Delta}\right)\varphi_3 = -k_u\frac{Y_{21}}{\Delta}I_{11}$$

$$\varphi_3\left[1 + k_u\frac{Y_{21}Y_{13} + Y_{23}Y_{11}}{\Delta}\right] = -k_u\frac{Y_{21}}{\Delta}I_{11}$$

Исключая единицу в скобках и сокращая общий множитель k_u, получаем

$$\varphi_3\left(Y_{21}Y_{13} + Y_{23}Y_{11}\right) = -Y_{21}I_{11}$$

$$\varphi_3 = \frac{-Y_{21}I_{11}}{Y_{21}Y_{13} + Y_{23}Y_{11}}$$

Запишем выражения для проводимостей и узловых токов:

$$Y_{11} = C_1 p + C_2 p + C_3 p + \frac{1}{R_1} = \left(C_1 + C_2 + C_3\right)p + \frac{1}{R_1} = \frac{\left(C_1 + C_2 + C_3\right)R_1 p + 1}{R_1}$$

$$Y_{22} = pC_2 + \frac{1}{R_2} = \frac{1 + R_2 C_2 p}{R_2}$$

$$Y_{12} = Y_{21} = C_2 p$$

$$Y_{13} = Y_{31} = C_1 p$$

$$Y_{23} = Y_{32} = \frac{1}{R_2}$$

$$I_{11} = E_{вх}Y_1 = \frac{E_{вх}}{R_1}$$

тогда:

$$\varphi_3 = \frac{-Y_{21}I_{11}}{Y_{21}Y_{13} + Y_{23}Y_{11}} = \frac{-C_2 p\cdot\dfrac{E_{вх}}{R_1}}{C_2 p\cdot C_1 p + \dfrac{1}{R_2}\cdot\dfrac{\left(C_1 + C_2 + C_3\right)R_1 p + 1}{R_1}} =$$

$$= \frac{-\dfrac{C_2 E_{вх} p}{R_1}}{C_1 C_2 p^2 + \dfrac{\left(C_1 + C_2 + C_3\right)R_1 p + 1}{R_1 R_2}} = \frac{-\dfrac{C_2 E_{вх} p}{R_1}}{\dfrac{C_1 C_2 R_1 R_2 p^2 + \left(C_1 + C_2 + C_3\right)R_1 p + 1}{R_1 R_2}} =$$

$$= \frac{-R_2 C_2 E_{вх} p}{C_1 C_2 R_1 R_2 p^2 + \left(C_1 + C_2 + C_3\right)R_1 p + 1}$$

Искомая передаточная функция:

$$K(p)=\frac{U_{вых}(p)}{E_{вх}(p)}=\frac{\varphi_3-\varphi_0}{E_{вх}}=\frac{\varphi_3}{E_{вх}}=\frac{\dfrac{-R_2C_2E_{вх}p}{C_1C_2R_1R_2p^2+\left(C_1+C_2+C_3\right)R_1p+1}}{E_{вх}}=$$

$$=\frac{-R_2C_2p}{C_1C_2R_1R_2p^2+\left(C_1+C_2+C_3\right)R_1p+1}=\frac{\dfrac{-R_2C_2p}{C_1C_2R_1R_2}}{p^2+\dfrac{\left(C_1+C_2+C_3\right)R_1}{C_1C_2R_1R_2}p+\dfrac{1}{C_1C_2R_1R_2}}=$$

$$=\frac{-\dfrac{1}{C_1R_1}p}{p^2+\dfrac{\left(C_1+C_2+C_3\right)}{C_1C_2R_2}p+\dfrac{1}{C_1C_2R_1R_2}}=\frac{b_1p}{p^2+a_1p+a_0}=$$

, где

$$b_1=-\frac{1}{C_1R_1}=-\frac{1}{1\times10^{-6}\cdot100}=-10000$$

$$a_1=\frac{\left(C_1+C_2+C_3\right)}{C_1C_2R_2}=\frac{\left(1\times10^{-6}+1\times10^{-6}+10{,}8\times10^{-6}\right)}{1\times10^{-6}\cdot1\times10^{-6}\cdot1000}=\frac{12{,}8\times10^{-6}}{1\times10^{-12}\cdot1000}=12800$$

$$a_0=\frac{1}{C_1C_2R_1R_2}=\frac{1}{1\times10^{-6}\cdot1\times10^{-6}\cdot100\cdot1000}=1\times10^7$$

Тогда:

$$K(p)=\frac{b_1p}{p^2+a_1p+a_0}=\frac{-10000p}{p^2+12800p+1\times10^7}$$

Найдем и построим АЧХ:

Для анализа передаточных свойств фильтра, представим функцию *K(p)* в комплексной форме записи заменив переменную p на $j\omega$

$$K(j\omega)=\frac{-10000\cdot j\omega}{\left(j\omega\right)^2+12800\cdot j\omega+1\times10^7}=\frac{-j10000\omega}{1\times10^7-\omega^2+j12800\omega}=\left|K(j\omega)\right|\cdot e^{j\psi(\omega)},$$

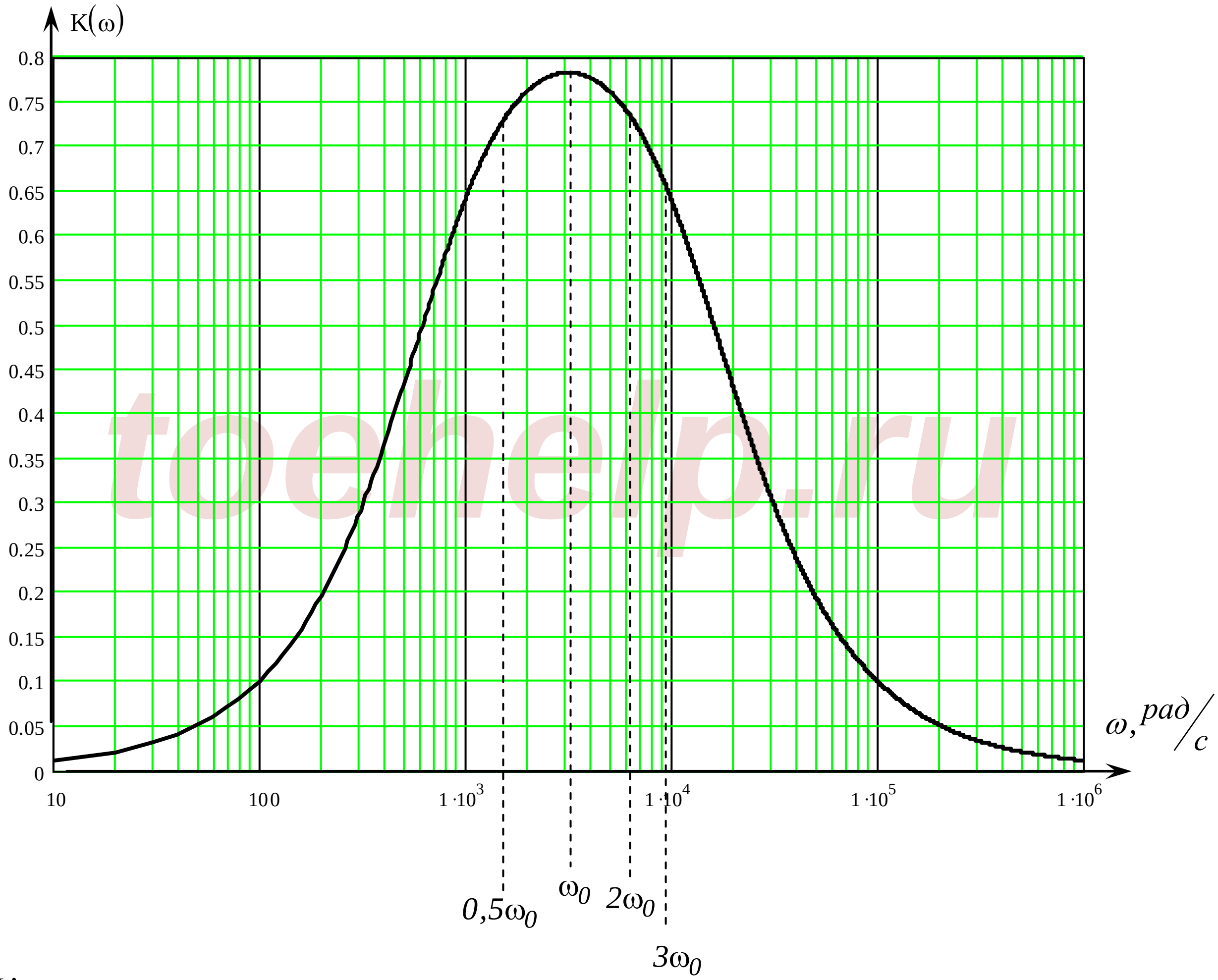
где $\left|H(j\omega)\right|$ - амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

$$\left|K(j\omega)\right|=\frac{10000\omega}{\sqrt{\left(1\times10^7-\omega^2\right)^2+(12800\cdot\omega)^2}}=\frac{10000\omega}{\sqrt{1\times10^{14}-2\cdot1\times10^7\omega^2+\omega^4+12800^2\cdot\omega^2}}=$$

$$=\frac{10000\omega}{\sqrt{\omega^4+1{,}4384\times10^8\omega^2+1\times10^{14}}}$$

По найденному выражению можно построить график АЧХ.

График АЧХ:



Здесь:

$$\omega_0 = \sqrt{a_0} = \sqrt{1 \times 10^7} = 3162{,}3 \;\frac{рад}{с}$$

При $\omega = 0$, K=0