

Задача 1.2.

<http://www.zachet.ru/>

Линейные электрические цепи синусоидального тока

Дано:

$$L_1 = 1,36 \text{ мГн}$$

$$L_3 = 10,9 \text{ мГн}$$

$$C_1 = 3,25 \text{ мкФ}$$

$$C_3 = 9,46 \text{ мкФ}$$

$$R_2 = 65 \text{ Ом}$$

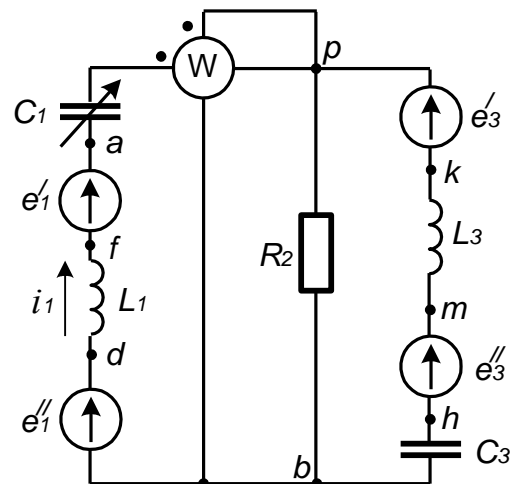
$$f = 700 \text{ Гц}$$

$$e'_1 = 141 \cos(\omega t - 90^\circ), \text{ В}$$

$$e''_1 = 0$$

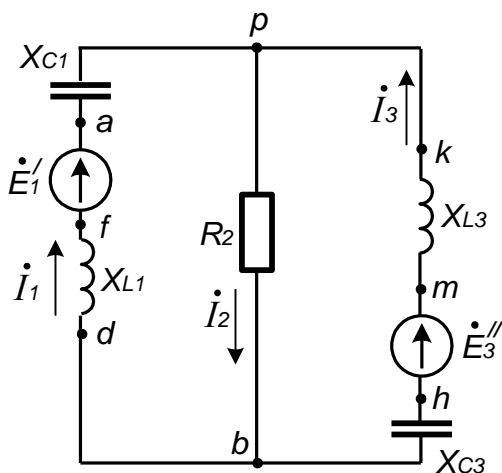
$$e'_3 = 0$$

$$e''_3 = 282 \sin(\omega t - 50^\circ), \text{ В}$$



Решение:

Т.к. $e''_1 = 0$, $e'_3 = 0$, то схему можно упростить исключив из нее эти элементы.



Угловая частота:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 700 \approx 4398,23 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

Сопrotивления реактивных элементов в схеме:

$$X_{L1} = \omega L_1 = 4398,23 \cdot 1,36 \times 10^{-3} \approx 5,98 \text{ Ом}$$

$$X_{L3} = \omega L_3 = 4398,23 \cdot 10,9 \times 10^{-3} \approx 47,94 \text{ Ом}$$

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{4398,23 \cdot 3,25 \times 10^{-6}} \approx 69,96 \text{ Ом}$$

$$X_{C3} = \frac{1}{\omega C_3} = \frac{1}{4398,23 \cdot 9,46 \times 10^{-6}} \approx 24,03 \text{ Ом}$$

1) На основании законов Кирхгофа составим в общем виде систему уравнений для расчета токов во всех ветвях цепи, записав ее в двух формах:

а) дифференциальной:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + R_2 i_2 = e'_1 \\ R_2 i_2 + L_3 \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_3} \int i_3 dt = e''_3 \end{cases}$$

б) символической:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0 \\ j(X_{L1} - X_{C1})\dot{I}_1 + R_2\dot{I}_2 = \dot{E}'_1 \\ R_2\dot{I}_2 + j(X_{L3} - X_{C3})\dot{I}_3 = \dot{E}''_3 \end{cases}$$

2) Рассчитаем комплексы действующих значений токов во всех ветвях, воспользовавшись методом узловых потенциалов.

В первую очередь, необходимо от мгновенных значений ЭДС перейти к комплексам действующих значений ЭДС. Переход осуществляется только от положительной синусоиды.

$$e'_1 = 141 \cos(\omega t - 90^\circ) = 141 \sin(\omega t), B \Rightarrow \dot{E}'_1 = \frac{141}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} \approx 99,7 B$$

$$e''_3 = 282 \sin(\omega t - 50^\circ), B \Rightarrow \dot{E}''_3 = \frac{282}{\sqrt{2}} e^{-j50^\circ} \approx 199,4 e^{-j50^\circ} \approx (128,17 - j152,75) B$$

Любой узел схемы можно заземлить. Токораспределение при этом не изменится.

Комплексные сопротивления ветвей:

$$\underline{Z}_1 = j(X_{L1} - X_{C1}) = j(5,98 - 69,96) = -j63,98 \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 = 65 \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_3 = j(X_{L3} - X_{C3}) = j(47,94 - 24,03) = j23,91 \text{ Ом}$$

Соответственно комплексные проводимости ветвей:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{-j63,98} \approx j0,01563 \text{ См}$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{65} \approx 0,015385 \text{ См}$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{j23,91} \approx -j0,041824 \text{ См}$$

Пусть $\phi_b = 0$ тогда по методу узловых потенциалов имеем

$$\phi_p = \frac{\dot{E}'_1 \underline{Y}_1 + \dot{E}''_3 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{99,7 \cdot j0,01563 + (128,17 - j152,75)(-j0,041824)}{j0,01563 + 0,015385 - j0,041824} \approx$$

$$\approx 244,73 e^{-j89,67^\circ} \approx (1,41 - j244,73) B$$

Токи в ветвях далее находятся по обобщенному закону Ома

$$I_1 = \frac{-\dot{\phi}_p + \dot{E}'_1}{Z_1} = \frac{-1,41 + j244,73 + 99,7}{-j63,98} \approx \frac{263,73e^{j68,12^\circ}}{63,98e^{-j90^\circ}} \approx 4,122e^{j158,12^\circ} \approx (-3,825 + j1,536) \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\dot{\phi}_p}{Z_2} = \frac{244,73e^{-j89,67^\circ}}{65} \approx 3,765e^{-j89,67^\circ} \approx (0,022 - j3,765) \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{-\dot{\phi}_p + \dot{E}''_3}{Z_3} = \frac{-1,41 + j244,73 + 128,17 - j152,75}{j23,91} \approx \frac{156,616e^{j35,97^\circ}}{23,91e^{j90^\circ}} \approx 6,55e^{-j54,03^\circ} \approx (3,847 - j5,301) \text{ A}$$

3) По результатам, полученным в п. 2, определить показание ваттметра

$$P_W = \operatorname{Re} \left[\dot{U}_{pb} I_1^* \right] = \operatorname{Re} \left[(\dot{\phi}_p - \dot{\phi}_b) \cdot I_1^* \right] = \operatorname{Re} \left[(244,73e^{-j89,67^\circ} - 0) \cdot 4,122e^{-j158,12^\circ} \right] \approx \\ \approx \operatorname{Re} \left[1008,8 \cdot e^{-j247,79^\circ} \right] \approx \operatorname{Re} [-381,33 + j933,95] = -381,33 \text{ Вт}$$

, где I_1^* - сопряженный комплекс тока I_1

Знак минус в результате говорит о том, что стоит поменять полярность подключения

4) Построить топографическую диаграмму, совмещенную с векторной диаграммой токов, потенциал точки a , указанной на схеме, примем равным нулю.

$\dot{\phi}_a = 0$; Найдем потенциалы других точек схемы:

$$\dot{\phi}_p = \dot{\phi}_a + jX_{C1} \dot{I}_1 = 0 + j69,96 \cdot (-3,825 + j1,536) \approx (-107,46 - j267,6) \text{ В}$$

$$\dot{\phi}_m = \dot{\phi}_p + jX_{L3} \dot{I}_3 = (-107,46 - j267,6) + j47,94 \cdot (3,847 - j5,301) \approx (146,67 - j83,17) \text{ В}$$

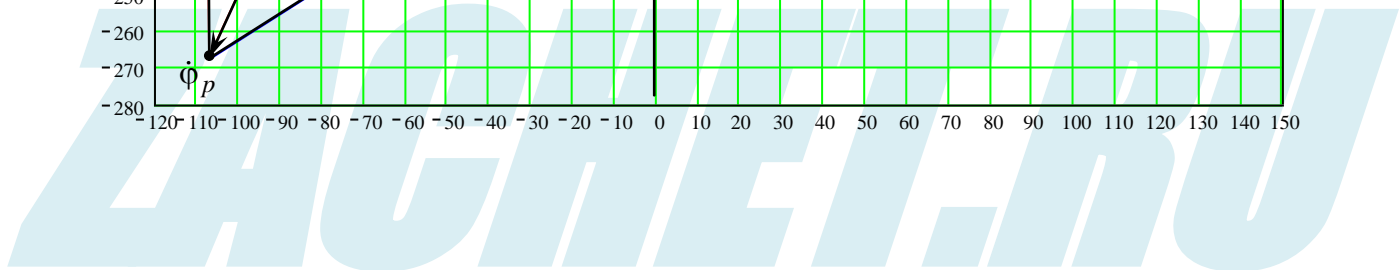
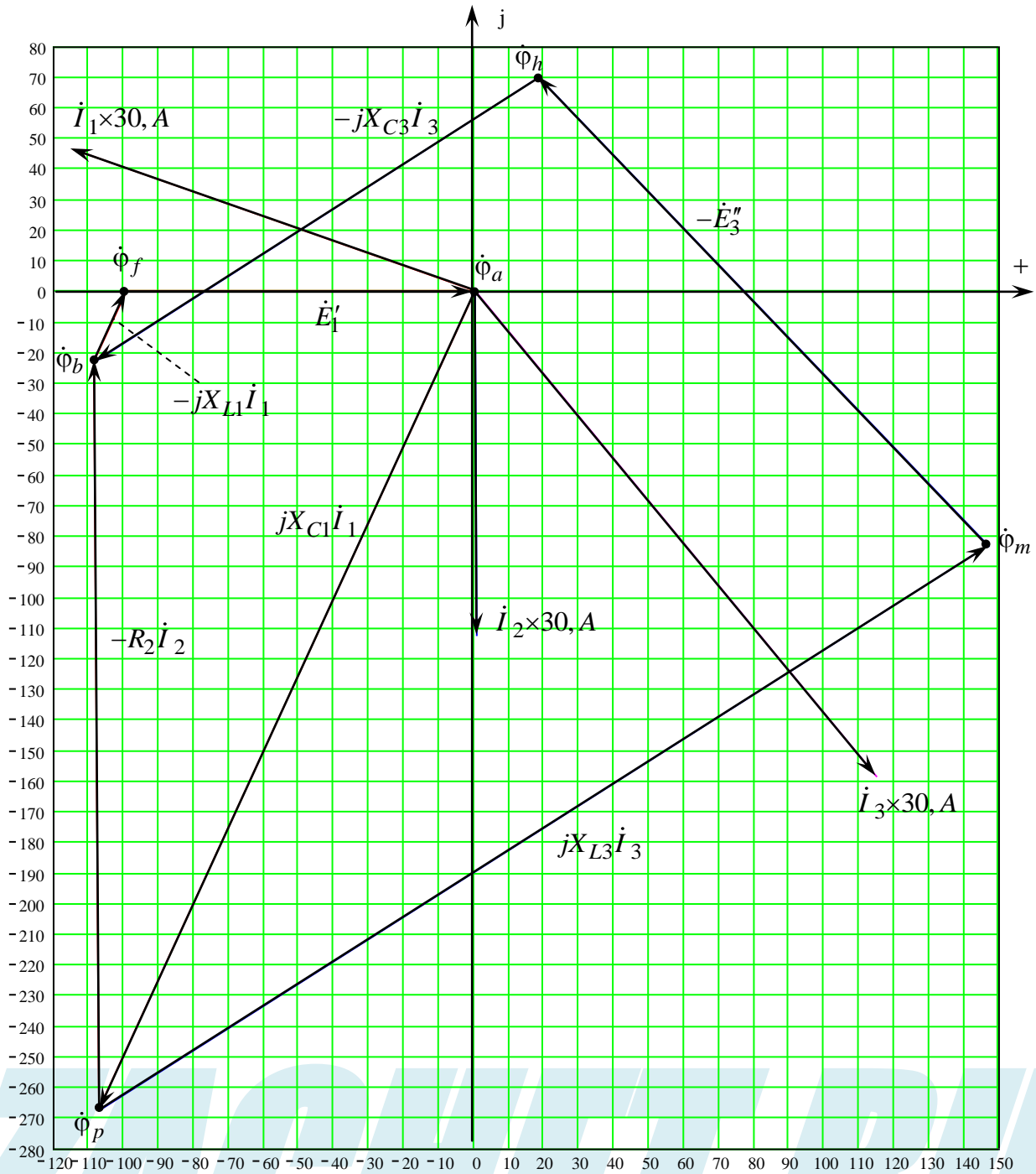
$$\dot{\phi}_h = \dot{\phi}_m - \dot{E}''_3 = (146,67 - j83,17) - (128,17 - j152,75) = (18,5 + j69,58) \text{ В}$$

$$\dot{\phi}_b = \dot{\phi}_h - jX_{C3} \dot{I}_3 = (18,5 + j69,58) - j24,03 \cdot (3,847 - j5,301) \approx (-108,88 - j22,86) \text{ В}$$

$$\dot{\phi}_f = \dot{\phi}_b - jX_{L1} \dot{I}_1 = (-108,88 - j22,86) - j5,98 \cdot (-3,825 + j1,536) \approx -99,7 \text{ В}$$

$$\dot{\phi}_a = \dot{\phi}_f + \dot{E}'_1 = -99,7 + 99,7 = 0$$

Теперь по найденным потенциалам и заданной схеме построим топографическую диаграмму, совмещенную с векторной диаграммой токов:



5) Построение круговой диаграммы тока

Расчет для построения круговой диаграммы ведем по методу эквивалентного генератора.

Разрываем ветвь с изменяющимся сопротивлением x_{C1} и определяем напряжение в месте разрыва – напряжение холостого хода U_{xx} .

$$\dot{U}_{xx} = \dot{E}'_1 - \dot{U}'_{pb} \quad (5.1)$$

где \dot{U}'_{pb} – напряжение на узлах p и b при разомкнутой ветви 1.

\dot{U}'_{pb} определяем при $\underline{Y}_1 = 0$.

$$\begin{aligned} \dot{U}'_{pb} &= \frac{\dot{E}'_1 \underline{Y}_1 + \dot{E}'_3 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{\dot{E}'_3 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{199,4e^{-j50^\circ} (-j0,041824)}{0,015385 - j0,041824} \approx \\ &\approx \frac{199,4e^{-j50^\circ} \cdot 0,041824e^{-j90^\circ}}{0,044564e^{-j69,8^\circ}} = 187,14e^{-j70,2^\circ} \approx (63,39 - j176,08) \end{aligned}$$

Тогда согласно (5.1)

$$\dot{U}_{xx} = \dot{E}'_1 - \dot{U}'_{pb} = 99,7 - (63,39 - j176,08) = (36,31 + j176,08) \approx 179,78e^{j78,35^\circ} \text{ В}$$

Сопротивление эквивалентного генератора $\underline{Z}_{эКВ}$ представляет собой сопротивление параллельно включенных комплексных сопротивлений \underline{Z}_2 и \underline{Z}_3 и последовательно включенного с ними сопротивления jX_{L1}

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{эКВ} &= jX_{L1} + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = j5,98 + \frac{65 \cdot j23,91}{65 + j23,91} \approx j5,98 + \frac{65 \cdot 23,91e^{j90^\circ}}{69,258e^{j20,2^\circ}} \approx \\ &\approx j5,98 + 22,44 \cdot e^{j69,8^\circ} \approx j5,98 + 7,748 + j21,06 \approx (7,748 + j27,04) \approx 28,128e^{j74,01^\circ} \text{ Ом} \end{aligned}$$

Ток короткого замыкания

$$\dot{I}_{1КЗ} = \frac{\dot{U}_{xx}}{\underline{Z}_{эКВ}} = \frac{179,78e^{j78,35^\circ}}{28,128e^{j74,01^\circ}} \approx 6,3915 \cdot e^{j4,34^\circ} \approx (6,3732 + j0,4837) \text{ А}$$

Ток в ветви 1 определяется по формуле

$$\dot{I}_1(x_{C1}) = \frac{\dot{E}'_{эКВ}}{\underline{Z}_{эКВ} - jX_{C1}} \quad (5.2)$$

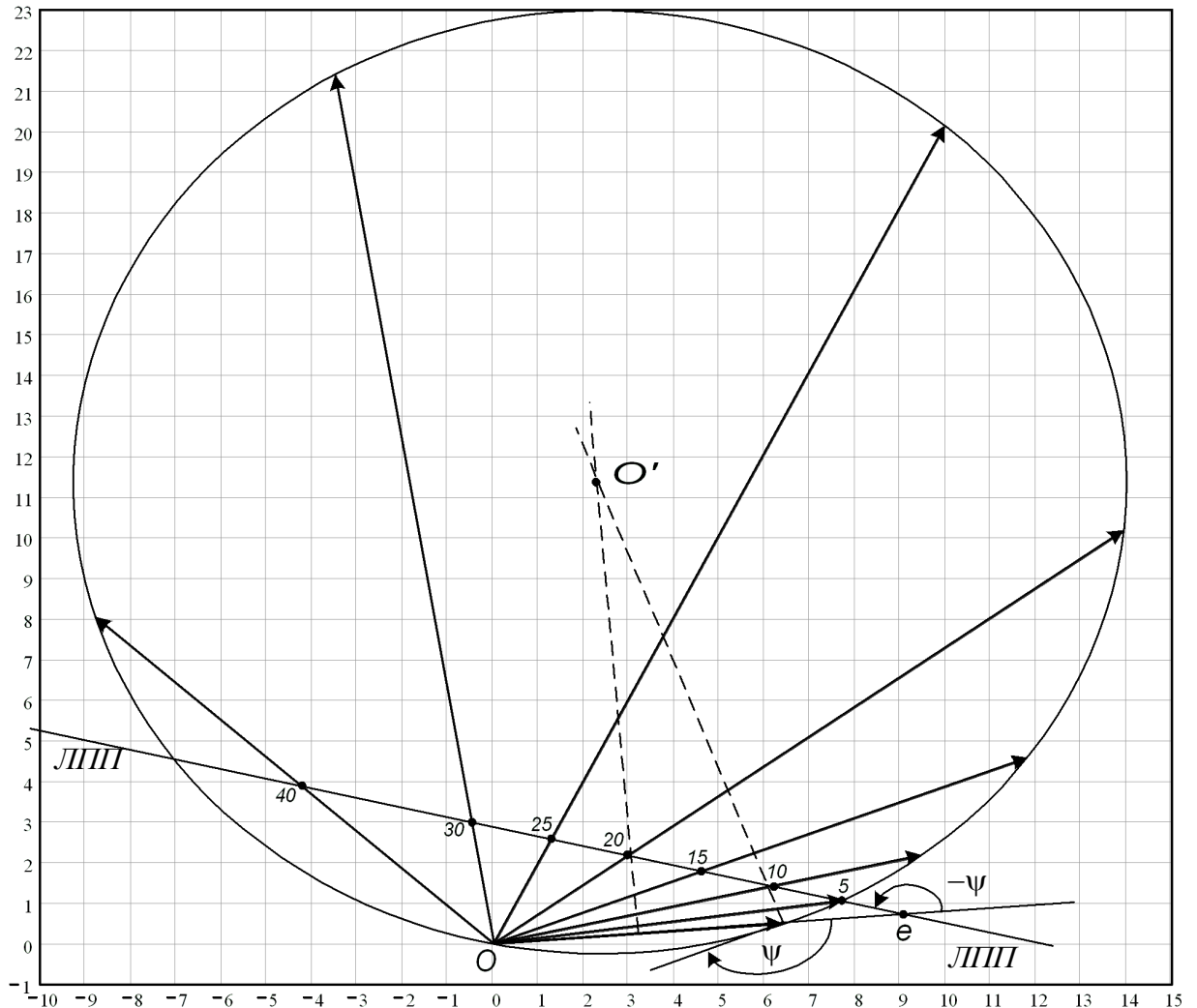
Для построения круговой диаграммы рассчитаем угол ψ

$$\psi = \varphi_{X_{C1}} - \varphi_{Z_{эКВ}} = -90^\circ - 74,01^\circ \approx -164,01^\circ.$$

Теперь построим круговую диаграмму:

- 1) Нанесем на комплексную плоскость вектор $\dot{I}_{1КЗ}$, он будет хордой окружности.
Точка O – будет в начале вектора $\dot{I}_{1КЗ}$
- 2) Под углом ψ к нему построим луч касательный к окружности.
- 3) На пересечении перпендикуляров к касательной в конце вектора $\dot{I}_{1КЗ}$ и к середине вектора $\dot{I}_{1КЗ}$ будет точка O' - центр окружности.
- 4) На отрезок « Oe » отложим $Z_{эКВ}$ в масштабе сопротивлений, точка « e » будет в конце отрезка.
- 5) Под углом $-\psi$ из точки « e » начертим ЛППП, нанеся на нее значения переменного сопротивления, соблюдая масштаб

Для нахождения интересующего нас тока, необходимо соединить точку «О» и отмеченное сопротивление на ЛПП. Вектор от точки «О» до окружности – модуль искомого тока \dot{I}_1 , а угол с осью абсцисс – аргумент.

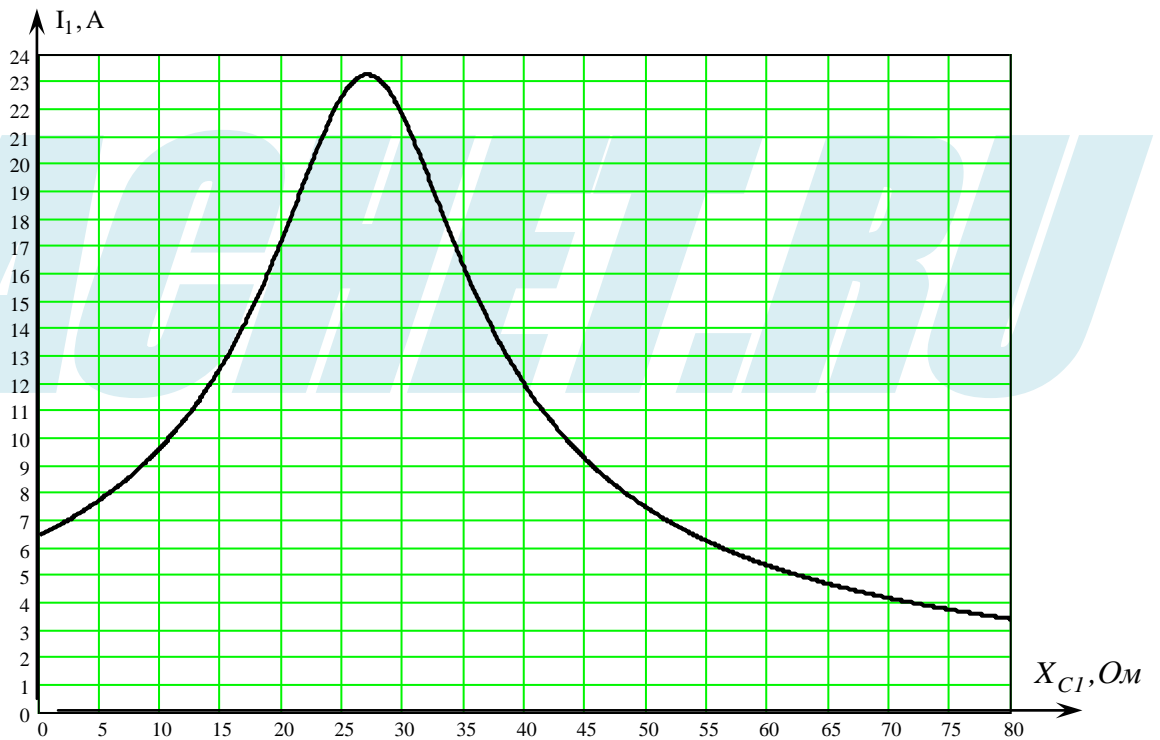


б) Построение зависимости $I_1(X_{C1})$

Выразим аналитически зависимость модуля тока I_1 от X_{C1} .

$$I_1(x_{C1}) = \left| \frac{\dot{E}_{\text{экв}}}{\underline{Z}_{\text{экв}} - jX_{C1}} \right| = \frac{E_{\text{экв}}}{\sqrt{\text{Re}(\underline{Z}_{\text{экв}})^2 + (\text{Im}(\underline{Z}_{\text{экв}}) - X_{C1})^2}}$$

График $I_1(X_{C1})$ представлен на рис:



Ток $I_1(X_{C1})$ достигает максимального значения при

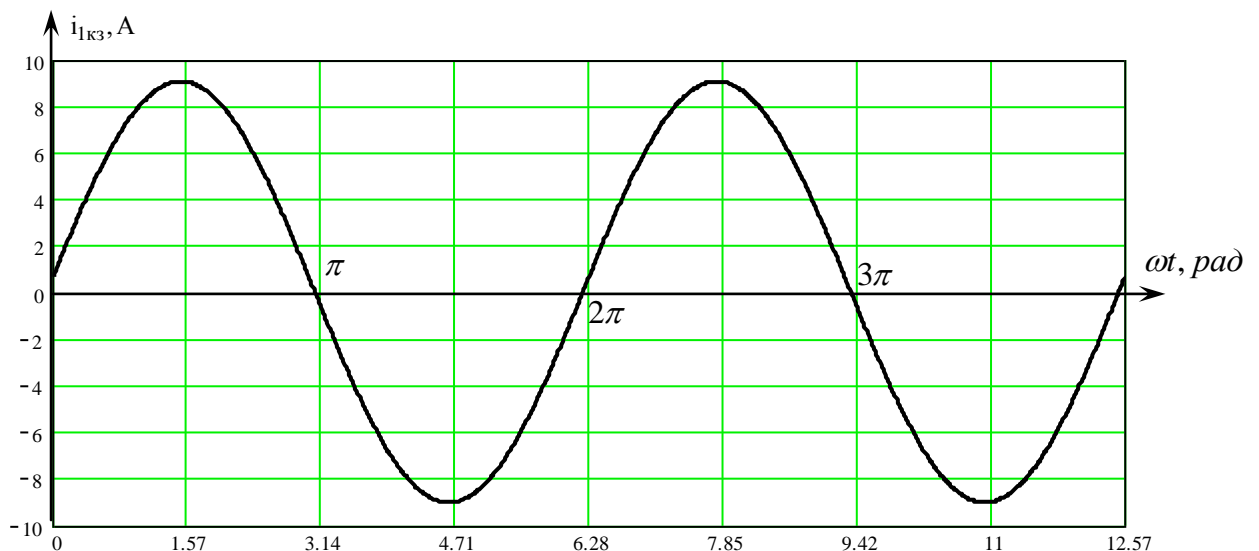
$$X_{C1} = \text{Im}(Z_{\text{экв}}) = 27,04 \text{ Ом}.$$

7) Используя данные расчетов, полученных в пп. 2, запишем выражение для мгновенного значения тока $i_{1КЗ}$. Построим график зависимости указанной величины от ωt .

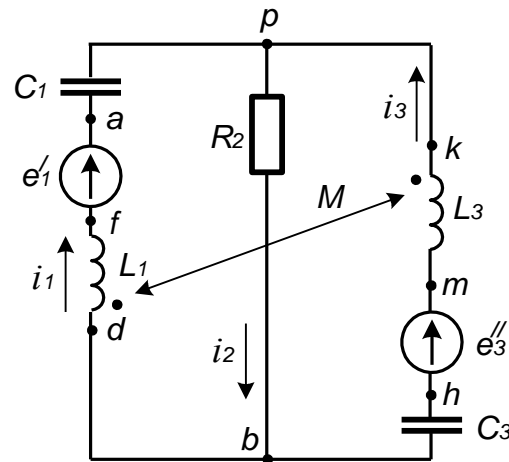
$$\dot{I}_{1КЗ} = 6,3915 \cdot e^{j4,34^\circ} \text{ A} \Rightarrow$$

$$i_{1КЗ}(\omega t) = 6,3915\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 4,34^\circ) \approx 9,039 \cdot \sin(\omega t + 4,34^\circ), \text{ A}$$

Построим график:



8) Полагая, что между двумя любыми индуктивными катушками расположенными в различных ветвях заданной схемы, имеется магнитная связь при взаимной индуктивности, равной M , составить в общем виде систему уравнений по законам Кирхгофа для расчета токов во всех ветвях схемы, записав ее в двух формах:



а) дифференциальной:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + R_2 i_2 = e'_1 \\ R_2 i_2 + L_3 \frac{di_3}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_3} \int i_3 dt = e''_3 \end{cases}$$

б) символической:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0 \\ j(X_{L1} - X_{C1})\dot{I}_1 + R_2 \dot{I}_2 - jX_M \dot{I}_3 = \dot{E}'_1 \\ -jX_M \dot{I}_1 + R_2 \dot{I}_2 + j(X_{L3} - X_{C3})\dot{I}_3 = \dot{E}''_3 \end{cases}$$